×44×

ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M' & P'

CONCOURS D'ADMISSION 1977

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES (2 h)

NOTA - Pour les calculs des questions 3° / et 4° / , la précision donnée par les règles à calcul sera considérée comme suffisante.

Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de degré au plus égal à 2 .A tout polynôme u de $\mathcal{P}$ on fait correspondre le polynôme U de $\mathcal{P}$ défini par

$$U(x) = \int_0^{\infty} (t^2 - 2xt + x^2)\, e^{-t}\, u(t)\, dt$$

et on désigne par Φ l'application linéaire $u \longmapsto U$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

1°/ Expliciter la matrice M de l'application linéaire Φ par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathcal{P}$ définie par $e_1(x) = x^2$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = 1$.

2°/ Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il des polynômes u de $\mathcal{P}$ non identiquement nuls vérifiant l'équation

$$(1) \qquad \lambda\, u(x) = \int_0^{\infty} (t^2 - 2xt + x^2)\, e^{-t}\, u(t)\, dt \ .$$

On sera amené à résoudre l'équation $\lambda^3 - 12\lambda - 8 = 0$. Pour cela, on utilisera le résultat suivant : lorsque l'on a $4p^3 + 27q^2 < 0$, les solutions de l'équation $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$ sont données par

$$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \ , \quad 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

avec φ solution de : $\cos\varphi = \dfrac{q}{\frac{2}{3}\,p\sqrt{\frac{-p}{3}}}$.

.../...

On rangera les solutions dans l'ordre croissant : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

3°/ On appelle polynôme normal tout polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1 .

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, déterminer le polynôme normal u_i de $\mathcal{P}$ qui soit solution de l'équation (1), dans laquelle on prend $\lambda = \lambda_i$ (le calcul numérique des cœfficients de u_i est demandé).

4°/ Soit maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que l'intégrale $\int_0^\infty t^n e^{-t} f(t)\,dt$ converge pour $n = 0, 1$ et 2 .

On considère l'équation :

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty (t^2 - 2xt + x^2)\, e^{-t} f(t)\,dt + g(x) ,$$

dans laquelle λ est un nombre réel non nul, g une fonction donnée dans $\mathcal{E}$ et f la fonction inconnue.

a) Etablir que, s'il existe une fonction f de $\mathcal{E}$ solution de (2), la fonction $f - g$ est un élément de $\mathcal{P}$; et montrer que, lorsque λ est différent de λ_1, λ_2 et λ_3, il existe une fonction de $\mathcal{E}$ et une seule, qui soit solution de (2).

b) Pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $\gamma > 0$, on désigne par $(E_{i,\gamma})$ l'équation obtenue en prenant dans (2)

$$\lambda = \lambda_i \quad \text{et} \quad g(x) = e^{(1-\gamma)x} .$$

Montrer que, quel que soit $i \in \{1,2,3\}$, l'ensemble des nombres $\gamma > 0$ tels que l'équation $(E_{i,\gamma})$ admette une solution appartenant à $\mathcal{E}$ coïncide avec l'ensemble des nombres $\gamma > 0$ vérifiant l'équation

$$(3) \qquad [(\lambda_i + 1)^2 + 3]\,\gamma^2 - 2(\lambda_i + 4)\,\gamma + 2(\lambda_i + 2) = 0 .$$

On désignera cet ensemble par Γ_i .

Si Γ_i n'est pas vide, déterminer, pour tout $\gamma \in \Gamma_i$, le polynôme normal u tel que la fonction f, définie par

$$f(x) = u(x) + e^{(1-\gamma)x} ,$$

soit solution de $(E_{i,\gamma})$ (le calcul numérique des cœfficients de u est demandé).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail